

# 50. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium

September, 19-23, 2005

**Maschinenbau  
von Makro bis Nano /  
Mechanical Engineering  
from Macro to Nano**

**Proceedings**

Fakultät für Maschinenbau /  
Faculty of Mechanical Engineering

Startseite / Index:

<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=15745>

## Impressum

- Herausgeber: Der Rektor der Technischen Universität Ilmenau  
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Scharff
- Redaktion: Referat Marketing und Studentische Angelegenheiten  
Andrea Schneider
- Fakultät für Maschinenbau  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Kurtz,  
Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. med. (habil.) Hartmut Witte,  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Linß,  
Dr.-Ing. Beate Schlütter, Dipl.-Biol. Danja Voges,  
Dipl.-Ing. Jörg Mämpel, Dipl.-Ing. Susanne Töpfer,  
Dipl.-Ing. Silke Stauche
- Redaktionsschluss: 31. August 2005  
(CD-Rom-Ausgabe)
- Technische Realisierung: Institut für Medientechnik an der TU Ilmenau  
(CD-Rom-Ausgabe) Dipl.-Ing. Christian Weigel  
Dipl.-Ing. Helge Drumm  
Dipl.-Ing. Marco Albrecht
- Technische Realisierung: Universitätsbibliothek Ilmenau  
(Online-Ausgabe) [ilmedia](#)  
Postfach 10 05 65  
98684 Ilmenau
- Verlag:  Verlag ISLE, Betriebsstätte des ISLE e.V.  
Werner-von-Siemens-Str. 16  
98693 Ilmenau

© Technische Universität Ilmenau (Thür.) 2005

Diese Publikationen und alle in ihr enthaltenen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt.

ISBN (Druckausgabe): 3-932633-98-9 (978-3-932633-98-0)  
ISBN (CD-Rom-Ausgabe): 3-932633-99-7 (978-3-932633-99-7)

Startseite / Index:  
<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=15745>

K. Liebermann / M. Weiß

## Optimierung von Schraubendruckfedern

### ABSTRACT

Die Fortschritte in der modernen Rechentechnik erlauben es in vielen Gebieten von Wissenschaft und Technik, Programme mit einem immer größer werdenden Funktionsumfang zu entwickeln. Auch für die Auslegung von Maschinenelementen können jetzt Berechnungsverfahren (z.B. FEM) und Programmalgorithmen verwendet werden, deren Abarbeitung noch vor wenigen Jahren Stunden oder gar Tage bis zur Ausgabe eines Ergebnisses gedauert hätte. Der Beitrag stellt zwei Ansätze vor, wie unter Zuhilfenahme moderner Rechentechnik und Softwareentwicklung eine verbesserte Dimensionierung von Schraubendruckfedern möglich ist.

### EINFÜHRUNG

In diesem Beitrag ist unter dem Begriff Optimierung zum einen zu verstehen, dass die Federparameter mit dem Ziel festgelegt werden, einen weiteren Federparameter zu maximieren oder zu minimieren (z.B. minimale Federmasse) und zum anderen durch eine genauere Modellierung (mathematische Beschreibung) der Feder auch eine bessere Anpassung an die geforderten Funktionseigenschaften zu erreichen. Hierzu ist die Entwicklung spezieller Software notwendig, die dann dem Konstrukteur für den Federentwurf zur Verfügung steht.

Für Schraubendruckfedern sind zwei prinzipielle Wege zu unterscheiden, wie mit Hilfe der Rechen-technik eine bessere Auslegung möglich wird:

1. Automatisierte Verwirklichung der iterativen Vorgehensweise bei der Federdimensionierung, die notwendig ist, weil zur Berechnung aller Federparameter nur zwei unabhängige Bestimmungsgleichungen (s. Gl.(1) und Gl.(2)) zur Verfügung stehen. Zu diesem Zweck sind entsprechende Algorithmen in die Dimensionierungssoftware zu implementieren. Die Algorithmen können dabei so gestaltet werden, dass auch die Optimierung der Federn nach beliebigen Kriterien erfolgen kann.
2. Die unter Punkt 1 verwendeten klassischen Bestimmungsgleichungen beinhalten eine Reihe vereinfachender Vereinbarungen, um die Federauslegung per Hand (inkl. Hilfsmittel wie Nomogramme oder Federrechenschieber) zu ermöglichen. Dieses vereinfachte Berech-

nungsmodell der Schraubenfeder kann bei Anwendung der Rechentechnik durch ein genaueres Modell ersetzt werden, das auch aktuelle Erkenntnisse aus der Forschung berücksichtigt. In Kombination mit den unter Punkt 1 verwendeten Algorithmen lassen sich dann beispielsweise folgende Verbesserungen erreichen:

- Verwenden einer realen, meist nicht-linearen Federkennlinie durch Berücksichtigen des Anlegens der Übergangswindungen  $n_{\bar{u}}$  bei Belastung der Feder;
- Berücksichtigen aller in der Feder auftretenden Spannungsanteile bei gleichzeitig verbesserter Nachbildung der Spannungsverteilung im Drahtquerschnitt;
- Verwenden von Messwerten für die Torsionsfliessgrenze  $\tau_{tF}$  zur Bestimmung der zulässigen Torsionsspannung  $\tau_{t\text{ zul}}$ ;
- Berücksichtigen des veränderlichen Steigungswinkels  $\alpha$  bei Belastung der Feder;
- Berechnen der Eigenfrequenzen (Längs-, Dreh- und Quereigenfrequenzen) [1].

Der Beitrag zeigt an ausgewählten Beispielen, wie mit Hilfe der Rechentechnik und dazugehörigen Programmen eine Optimierung der Federauslegung erreicht werden kann. Die hierzu entwickelte Software **FedPro** zur Dimensionierung von Schraubendruckfedern integriert bereits einige der oben aufgeführten Verbesserungen bzw. sie ist für deren Integration offen.

## OPTIMIEREN VON FEDERN DURCH EXTREMWERTERMITTLUNG VON FEDERPARAMETERN

Grundlage jeder Dimensionierung ist ein mathematisches Modell, das den funktionellen Zusammenhang verschiedener Parameter eines Objektes beschreibt. Die Dimensionierung bzw. Optimierung beinhaltet das Finden einer Kombination dieser Parameter, damit das Objekt eine gegebene Aufgabenstellung erfüllen kann [2]. Dieses Finden erfolgt durch Anwendung geeigneter Algorithmen. Der Unterschied von Dimensionierung und Optimierung liegt nur im Abbruchkriterium der Berechnung. Beim Dimensionieren reicht das Finden **einer zulässigen Lösung** für die Parameterkombination aus. Bei der Optimierung möchte man die **beste Lösung** (beste Parameterkombination) ermitteln, mit der der Wert eines gewählten Kriteriums seinen günstigsten Wert erreicht.

Bei der Federdimensionierung werden vom Konstrukteur fast immer die Funktionsgrößen (Federkräfte  $F$ , -wege  $s$ , -längen  $L$ , Federrate  $R$ ) vorgegeben und damit die funktionellen Charakteristika der Feder (Kraft-Weg-Zusammenhang  $F = f_{kt}(s)$ ) festgelegt. Aufgabe der Dimensionierung ist es, die Gestaltparameter zu bestimmen, mit denen die Feder die geforderte Funktion erfüllen kann. Dabei sind auch werkstoff- und fertigungstechnische Aspekte zu berücksichtigen [3]. Weiterhin besteht vielmals die Forderung, die Feder für ein bestimmtes Kriterium zu optimieren.

Für die Dimensionierung von Schraubendruckfedern bedeutet dies, dass ein Berechnungsmodell benötigt wird, welches das Gebilde Schraubendruckfeder beschreibt. Mit Hilfe von Algorithmen kann dieses Berechnungsmodell gelöst werden.

Das Modell der Schraubendruckfeder stützt sich auf die zwei bekannten Bestimmungsgleichungen

– den **Funktionsnachweis** 
$$R = \frac{F}{s} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n_f \cdot D^3} = konst. \quad (1)$$

– und den **Festigkeitsnachweis** 
$$\tau_t = \frac{8 \cdot D \cdot F}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_{t\,zul}, \quad (2)$$

die aber nicht ausreichen, die Gestaltparameter:

- Drahtdurchmesser  $d$ ;
- Windungsdurchmesser  $D$ ;
- Anzahl der federnden Windungen  $n_f$  und
- Federlänge  $L_0$

in einem Berechnungsgang festzulegen. Zusätzlich müssen bei der Dimensionierung Plausibilitätstests durchgeführt und Restriktionen berücksichtigt werden (Bild 1).

Unter Federdimensionierung wird deshalb der Vorgang verstanden, bei dem für die Parameter  $d$ ,  $D$  und  $n_f$  Werte ermittelt werden, die dem Funktions- und Festigkeitsnachweis genügen. Bei der Federoptimierung muss als zusätzliche Bedingung berücksichtigt werden, dass mit den Parameterwerten für einen oder mehrere andere Federparameter ein Extremwert erreicht wird.

Vorschläge für Optimierungsziele sind in [4], [5] oder auch [6] aufgeführt. Die wichtigsten sind:

- die minimale Federmasse (das minimale Federvolumen);
- das minimale Einbauvolumen;
- die maximale Energie bei vorgegebenem Volumen;
- die minimale Auswirkung von Toleranzen;
- die maximale Knicksicherheit;
- die maximale Schalthäufigkeit;
- die maximale Lebensdauer;
- die minimale Einbaulänge  $L_1$  und
- die minimale Blockfederlänge  $L_c$ .

All diese Punkte führen zwangsläufig zu einem mehrmaligen Durchlaufen der sogenannten „Gestaltungsphase“ nach Bild 2. Dabei handelt es sich um einen Begriff aus der Konstruktionslehre, der einen bestimmten Entwicklungszyklus innerhalb des konstruktiven Entwicklungsprozesses beschreibt [7], [8], [9].

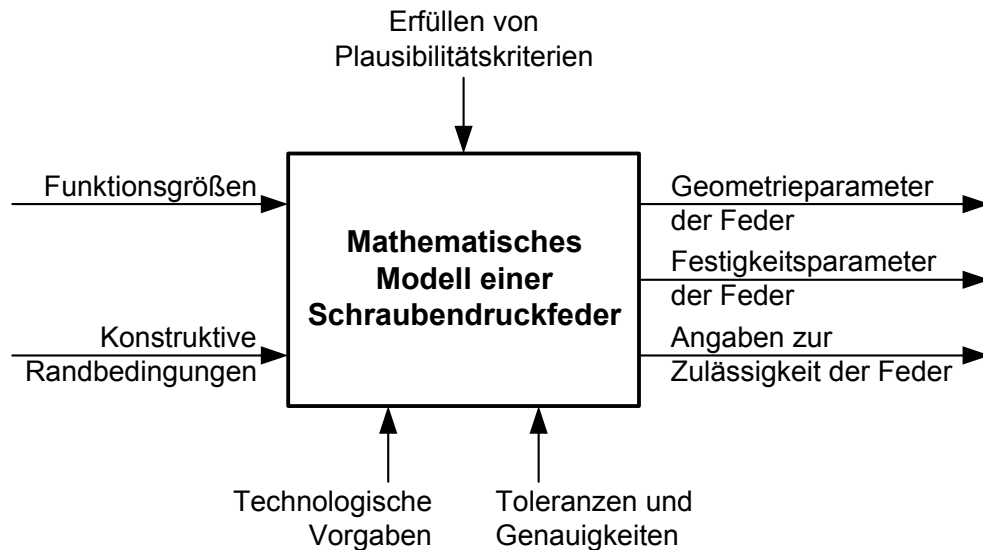


Bild 1: Darstellung des mathematischen Modells einer Schraubendruckfeder als Black-Box

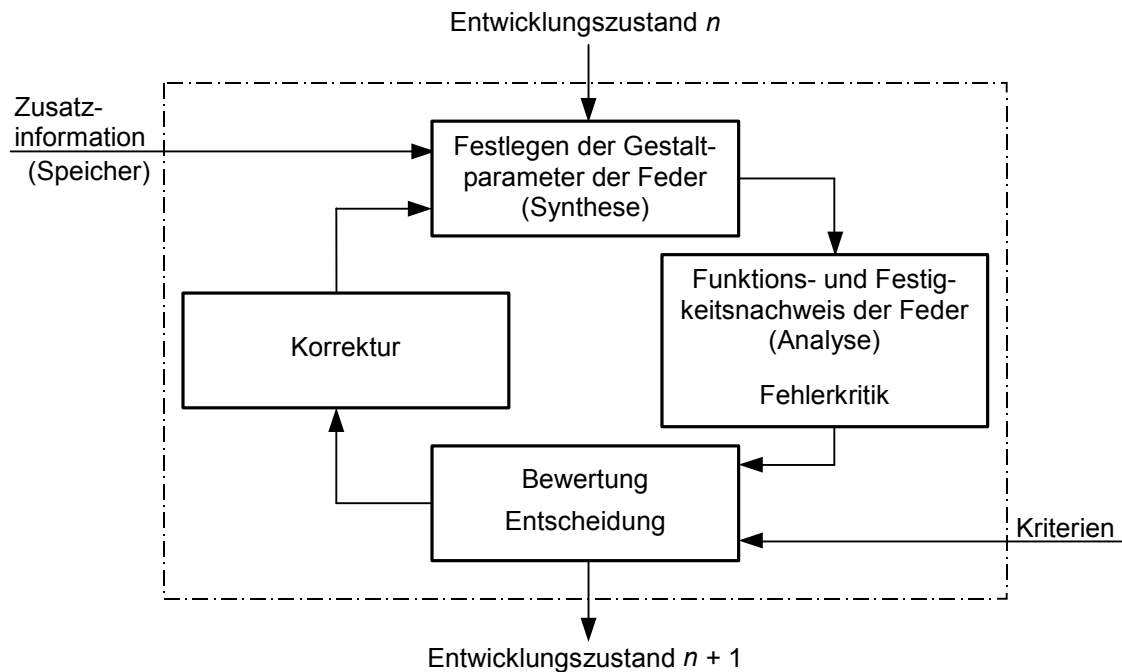


Bild 2: Entwicklungszyklus innerhalb der „Gestaltungsphase“ [8]

Für den Konstrukteur bedeutet das einen mehrmaligen Wechsel von Synthese- und Analysetätigkeiten. Das beinhaltet auch das Treffen von Entscheidungen zum Fortgang der Dimensionierung. Selbst wenn für die Dimensionierung Hilfsmittel wie Nomogramme, Federrechenchieber oder eine spezielle Software eingesetzt werden, benötigt der Konstrukteur für eine effektive Entscheidungsfindung zumeist gute Kenntnisse des mathematischen Modells der Feder und unter Umständen auch des Berechnungs- bzw. Bedienalgorithmus des Hilfsmittels. Das Optimieren der Gestaltparameter zum Erzielen eines Maximums oder Minimums für ein bestimmtes Kriterium erhöht zudem den Arbeitsaufwand beträchtlich.

Beispiele zum Aufstellen der Berechnungsmodelle und der Entwicklung der zugehörigen Berechnungsalgorithmen sind in der Literatur zahlreich beschrieben, wobei sich zwei grundsätzliche Lösungsansätze unterscheiden lassen:

### Lösungsansatz 1:

Der Konstrukteur muss zunächst einen zusätzlichen Parameter vorgeben, der in der weiteren Berechnung gegebenenfalls angepasst wird. Die Autoren diverser Literaturstellen gehen häufig von einem speziellen Einsatzfall der Feder aus, dessen Gegebenheiten ihnen das Vorgeben eines zusätzlichen Parameters, meist in Form einer Restriktion (z. B. Einbauraum), ermöglicht. Beispiele hierfür sind in Tafel 1 aufgeführt.

Tafel 1: Beispiele für Parameter, die bei der Dimensionierung von Schraubendruckfedern vom Konstrukteur zusätzlich vorzugeben sind

Vorzugebender Parameter	Referenz- bzw. Literaturstelle
Windungsdurchmesser $D$	[10], [11]
Drahtdurchmesser $d$	[12]
Wickelverhältnis $w = D / d$	[13]
Äußerer Windungsdurchmesser $D_e$	[14], [15], [16]
Hülsendurchmesser $D_H$	[17], [18]

Charakteristisch für diesen Lösungsansatz ist der große Anteil an manueller Arbeit für den Konstrukteur, die z.B. das Überprüfen verletzter Restriktionen und eine Nachrechnung beinhaltet.

### Lösungsansatz 2:

Neben der Forderung der Funktionserfüllung der Feder, soll diese häufig auch für ein oder mehrere Kriterien optimiert werden. Hierzu werden **Parameteroptimierungsverfahren** eingesetzt, deren Ablauf prinzipiell das systematische Variieren der Federparameter und das Überprüfen der Restriktionen beinhaltet. Der dazu erforderliche Rechenaufwand ist nur selten von Hand zu bewältigen, weshalb dieser Lösungsansatz sinnvollerweise immer einer rechentechnischen Umsetzung bedarf.

### Parameteranalyse als diskretes Dimensionierungsverfahren

Prinzipiell können beide Lösungsansätze rechentechnisch umgesetzt werden, aber nur mit dem Einsatz eines Parameteroptimierungsverfahrens als Berechnungsalgorithmus ist eine effektive Dimensionierung optimal ausgelegter Feder möglich. Eine Analyse der bislang verwendeten Algorithmen führte zu zwei Fragen:

1. Warum wird in den meisten Dimensionierungsmodellen und -algorithmen der Drahtdurchmesser  $d$  berechnet und dann ein Normwert gesucht?

2. Warum werden zur Parameteroptimierung zumeist kontinuierliche (z. B. stochastische) Verfahren verwendet und nicht diskrete?

Die Antwort auf diese Fragen lautet, dass die Rechentechnik bisher nicht leistungsfähig genug war. In den letzten Jahren hat die Rechentechnik jedoch große Fortschritte erzielt. Dies erlaubt es, über andere Ansätze und damit andere Algorithmen für die Federdimensionierung nachzudenken. So ist es jetzt möglich, die sogenannte Parameteranalyse als Berechnungsalgorithmus einzusetzen. Dieses Verfahren berechnet alle Lösungen einer Lösungsmenge und wird deshalb auch als vollständige Enumeration [19] bezeichnet. Es zählt zu den Verfahren der ganzzahligen Optimierung. Liegen alle Parameter für die Dimensionierung in kontinuierlicher Form vor, entsteht eine unendliche Lösungsmenge. Existieren jedoch Parameter in diskreter Form, und das ist im Maschinenbau durch das Verwenden von Normen und Baureihen gegeben, dann ergibt sich eine endliche Lösungsmenge. Die Kenntnis aller Lösungen und das Definieren von Suchkriterien gestatten es, für eine gegebene Aufgabenstellung eine geeignete Lösung (Feder) zu finden.

### Dimensionieren von Schraubendruckfedern mittels Parameteranalyse

Das Ziel der Federdimensionierung besteht darin, die Geometrieparameter  $d$ ,  $D$  und  $n_f$  so festzulegen, dass die Feder eine geforderte Federrate  $R$  besitzt. Die Federrate ist damit als Konstante zu betrachten. Dies gilt auch für den Gleitmodul  $G$ , da das zu verwendende Drahtmaterial in der Regel vor der Dimensionierung festzulegen ist. Zur Bestimmung von  $R$  dient Gl. (1), deren Umstellen zu drei möglichen Funktionen führt (Tafel 2).

Tafel 2: Funktionen für die Parameteranalyse zum Dimensionieren von Schraubendruckfedern

	Vorgegebene, diskrete Parameter	Funktionen für Parameteranalyse
Variante 1	$d, n_f$	$D = \sqrt[3]{\frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n_f \cdot R}} \quad (3)$
Variante 2	$d, D$	$n_f = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot R \cdot D^3} \quad (4)$
Variante 3	$D, n_f$	$d = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot n_f \cdot D^3 \cdot R}{G}} \quad (5)$

Soll zum Lösen einer Gleichung die Parameteranalyse angewendet werden, darf der Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nur Konstanten oder diskrete Parameter beinhalten.

Prinzipiell sind alle drei Varianten für die Parameteranalyse anwendbar. Eine nähere Betrachtung der Gegebenheiten bei der Dimensionierung von Schraubendruckfedern führt zum Favorisieren der Variante 1, weil der Drahtdurchmesser  $d$  und die Anzahl der federnden Windungen  $n_f$  sich besonders gut als diskrete Parameter eignen. Gründe hierfür sind:



- Der Drahtdurchmesser  $d$  wird in genormten, diskreten Abstufungen hergestellt.
- Für die Anzahl der federnden Windungen  $n_f$  wird nicht jeder mögliche Wert gefertigt. So ist es in der Praxis üblich, Federn auf eine halbe Windung ( $5\frac{1}{2}$ ,  $6\frac{1}{2}$  usw.) enden zu lassen, da dies nach [3], [20] u. a. eine axiale Krafteinleitung gewährleistet.
- Der Windungsdurchmesser  $D$  lässt sich an einer Windemaschine genauer einstellen und anschließend messen als dies für die Anzahl der federnden Windungen  $n_f$  möglich ist.

Das mathematische Modell basiert somit grundlegend auf der Berechnung des Windungsdurchmessers  $D$  nach Gl. (3), denn damit kann die gewünschte Funktion (Federrate  $R$ ) der Feder gewährleistet werden. Somit ergibt sich für die Parameteranalyse, bei der Drahtdurchmesser  $d$  und die Anzahl der federnden Windungen  $n_f$  variiert werden, folgende Gleichung:

$$D_{ij} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot d_i^4}{8 \cdot n_{fj} \cdot R}}; \quad d_i = d_1, \dots, d_m, \quad n_{fj} = n_{f1}, \dots, n_{fn} \quad (6)$$

### Federdimensionierungsprogramm FedPro

Die beschriebene Vorgehensweise wird durch eine auf MS Excel basierende Dimensionierungssoftware für Schraubendruckfedern umgesetzt, die im weiteren unter der Programmbezeichnung **FedPro** behandelt wird. Die darin verwirklichte Parameteranalyse ermittelt zunächst unter der Berücksichtigung von Plausibilitäts- und Zulässigkeitskriterien alle mathematisch bestimmbaren Federn. Daran schließt sich eine Überprüfung der vom Anwender vorgegebenen Restriktionen an. Bei Verletzung von mindestens einer Restriktion wird eine Feder als nicht zulässig betrachtet. All dies geschieht ohne Eingriff des Anwenders. Dazu wurde der bisher übliche iterative Berechnungsablauf vollständig der Software übertragen. Die Entscheidung über die Auswahl der zu fertigenden Feder verbleibt aber weiterhin beim Anwender, wofür in **FedPro** diverse Entscheidungshilfen integriert sind.

Als ein Ergebnis der Berechnung werden die Federn aufgelistet, die für ein bestimmtes Optimierungskriterium ein Maximum bzw. Minimum erreichen (Bild 3). Derzeit sind das z.B. die Federn mit der minimalen Masse oder mit minimalem Einbauvolumen. Prinzipiell kann aber für jedes Kriterium eine optimale Feder gesucht werden. Es gibt nur eine Einschränkung: Der zu optimierende Parameter darf im verwendeten Berechnungsmodell kein Vorgabeparameter sein.

			Nr.	d [mm]	n <sub>f</sub>	D [mm]	n <sub>e</sub>	L <sub>e</sub> [mm]
<b>Optimale Federn mit</b>								
<input checked="" type="radio"/>	Minimaler Masse	m <sub>F</sub>	182	4,5	12,5	27,43	14,50	110,05
<input type="radio"/>	Minimalem Einbauvolumen	V <sub>E</sub>	182	4,5	12,5	27,43	14,50	110,05
<input type="radio"/>	Maximaler Längseigenfrequenz	f <sub>l</sub>	207	4,75	9,5	32,31	11,50	98,19
<input type="radio"/>	Minimalem Schlankheitsgrad	λ	235	5	9,5	34,59	11,50	101,45

Bild 3: Anzeige ausgewählter Parameter für optimal dimensionierte Federn

Neben der Möglichkeit der effizienten Federdimensionierung und –optimierung besitzt **FedPro** außerdem folgende wichtige Programmeigenschaften [21]:

- Wählen verschiedener Kombinationen von vorzugebenden Funktionsgrößen;
- Verwenden von zwei Datenbanken für Drahtmaterial, die auf Normen bzw. Messwerten basieren;
- Rechnen mit Messwerten für die zulässige Torsionsspannung  $\tau_{t\text{ zul}}$  (Messwert aus einem Torsionsversuch [22] – siehe auch Abschnitt 0);
- Festlegen von Grenzwerten, in denen die Federn zulässig sind bzw. ihr Optimum für verschiedene Kriterien besitzen sollen;
- Berechnen der Eigenfrequenzen (Längs-, Quer- und Dreheigenfrequenz) [23], [24];
- Berechnen der Feder für den statischen und, falls möglich, auch für den dynamischen Einsatzfall;
- Suchmöglichkeit nach Vergleichsfedern;
- Anzeigen einer ausgewählten Feder in einer frei beweglichen 3-D-Darstellung;
- Abspeichern von Kennwerten in Szenarien zwecks Variantenvergleich;

Weitere Informationen zu **FedPro** und die Möglichkeit des Herunterladens der kostenlosen Demo-Version sind auf den Seiten des Steinbeis-Transferzentrums Federntechnik zu finden.

[www.tu-ilmenau.de/stz-federntechnik](http://www.tu-ilmenau.de/stz-federntechnik)

## OPTIMIEREN VON FEDERN DURCH VERBESSERUNG DES DIMENSIONIERUNGSMODELLS

Das klassische Berechnungsmodell für Schraubenfedern und die verwendeten Materialkennwerte basieren z.T. auf Vereinbarungen und Vereinfachungen [2] [3], deren Anwendung in der Vergangenheit für die notwendige Genauigkeit bei der Federdimensionierung ausreichten. Im Zuge immer höher werdender Qualitätsansprüche an Federn (und Drahtformbiegeteile) sind aber zunehmend auch bereits beim Federentwurf höhere Genauigkeitsanforderung zu erfüllen. Dazu ist es einerseits

notwendig, das Berechnungsmodell der Feder weiter an die Realität anzupassen. Andererseits ist es erforderlich, die genauen Materialkennwerte für die verschiedenen Belastungsarten zu kennen. So werden beispielsweise für den Funktionsnachweis von torsionsbeanspruchten Federn der G-Modul und die zulässige Torsionsspannung  $\tau_{t\text{ zul}}$  benötigt. Die entsprechenden Werte werden normalerweise aus Normen entnommen oder über Beziehungen ermittelt, die nur bedingt das Materialverhalten von Federdraht widerspiegeln. Allein die genauere Kenntnis dieser Materialkennwerte würde zu einer Federdimensionierung führen, bei der eine verbesserte Übereinstimmung zwischen berechneter und gefertigter Feder sowie eine bessere Materialauslastung erreichbar sind.

Im folgenden sollen daher eine Reihe von Möglichkeiten zur Verbesserung des Berechnungsmodell für Schraubendruckfedern und zur Ermittlung der bei der Federdimensionierung verwendeter Materialkennwerte vorgestellt werden, für die bereits Lösungsansätze vorhanden [25] bzw. in Vorbereitung sind [26].

## Dimensionieren mit federrelevanten Drahtkennwerten

Bislang ist es üblich, die Materialkennwerte für die verschiedenen Belastungsarten aus den Ergebnissen des Zugversuches zu ermitteln. Problematisch ist dabei, dass hierfür Materialeigenschaften vorausgesetzt werden, die auf Federmaterial nicht zutreffen, weil es aufgrund seiner Herstellung kaltverfestigt und damit weder homogen noch isotrop ist. Dieser Umstand verlangt eine kritische Betrachtung der Übertragung der Materialeigenschaften in Zugversuch auf andere Belastungsarten. Als Beispiel sei der Festigkeitsnachweis von Schraubenfedern aufgeführt. Die im Federdraht infolge der Belastung durch die Kraft  $F$  entstehende Torsionsspannung  $\tau_t$  muss im Vergleich zur zulässigen Torsionsspannung  $\tau_{t\text{ zul}}$  folgende Bedingung erfüllen:

$$\tau_t = \frac{8 \cdot D \cdot F}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_{t\text{ zul}} \quad (2)$$

Bei der Auslegung von Maschinenelementen ist es üblich, die zulässige Spannung über ein Verhältnis aus ertragbarer Spannung und einem Sicherheitsfaktor  $S_F$  zu bestimmen. Im Falle der Schraubendruckfeder müsste daher als ertragbare Spannung die Torsionsfließgrenze  $\tau_{tF}$  verwendet werden:

$$\tau_{t\text{ zul}} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \quad (7)$$

Gebräuchlich ist in der Federntechnik aber die Beziehung

$$\tau_{t\text{ zul}} = 0,56 \cdot R_m \quad (8)$$

Beide Ansätze gehen davon aus, dass in einer belasteten Feder hauptsächlich Torsionsspannungen entstehen, was sich auch in der Beziehung für die Vergleichsspannung widerspiegelt:

$$\sigma_v = \sqrt{3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_t \leq \sigma_{zul} \quad (9)$$

Für die zulässige Vergleichsspannung  $\sigma_v = \sigma_{zul}$  wird normalerweise die Streckgrenze  $R_e$  verwendet. Bei Werkstoffen ohne ausgeprägter Streckgrenze, wie z. B. bei Federstahldrähten, wird stattdessen die 0,2 % - Dehngrenze  $R_{p0,2}$  eingesetzt [27]:

$$\tau_{t\,zul} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_v = 0,577 \cdot \sigma_v = 0,577 \cdot R_{p0,2} \quad (10)$$

Dennoch wird in der Federntechnik die zulässige Torsionsspannung  $\tau_{t\,zul}$  auf die Zugfestigkeit  $R_m$  der Drähte bezogen, da die Dehngrenze  $R_{p0,2}$  und die Zugfestigkeit  $R_m$  bei Federdrähten relativ nah beieinander liegen ( $R_{p0,2} \approx 0,9 R_m$ ) und die Zugfestigkeit ohne größeren messtechnischen Aufwand ermittelt werden kann. Werte für  $R_{p0,2}$  lassen sich nur unter Verwendung eines Feindehnungsaufnehmers bestimmen. Auch in den Normen für Federdrähte (z. B. [28] oder [29]) wird nur die Zugfestigkeit der Drähte angegeben.

Ziel künftiger Verbesserungen der Dimensionierungsgenauigkeit muss es daher sein, die zulässige Torsionsspannung  $\tau_{t\,zul}$  nicht mehr über die Zugfestigkeit  $R_m$  zu bestimmen, sondern aus Messwerten für die Torsionsfließgrenze  $\tau_{tF}$ . Erste Untersuchungen zur Ermittlung der Torsionsfließgrenze  $\tau_{tF}$  liegen vor [25]. Ebenso sieht **FedPro** bereits die Möglichkeit vor, für alle Materialien die Torsionsfließgrenze  $\tau_{tF}$  [26] in den dazugehörigen Drahtdatenbanken abspeichern und daraus  $\tau_{t\,zul}$  berechnen zu können.

## Verwenden einer nicht-linearen Federkennlinie

Die Haupt-Bestimmungsgleichungen (1) und (2) zur Dimensionierung von Schraubendruckfedern berücksichtigen nur den Torsionsspannungsanteil im Draht. Außerdem vernachlässigen Sie den Steigungswinkel  $\alpha$ .

Eine Berücksichtigung der anderen Spannungsanteile und des Einflusses des Steigungswinkels  $\alpha$  wird durch Modellierung der Feder als räumlich gekrümmter Stab möglich. Zu diesem Zweck zeigt Bild 4 einen Federabschnitt mit konstanter Steigung (Federmittelteil), auf den zur Bestimmung der bei axialer Belastung im Draht auftretenden Spannungen und Verformungen das aus der Technischen Mechanik übliche Schnittprinzip angewendet wurde.

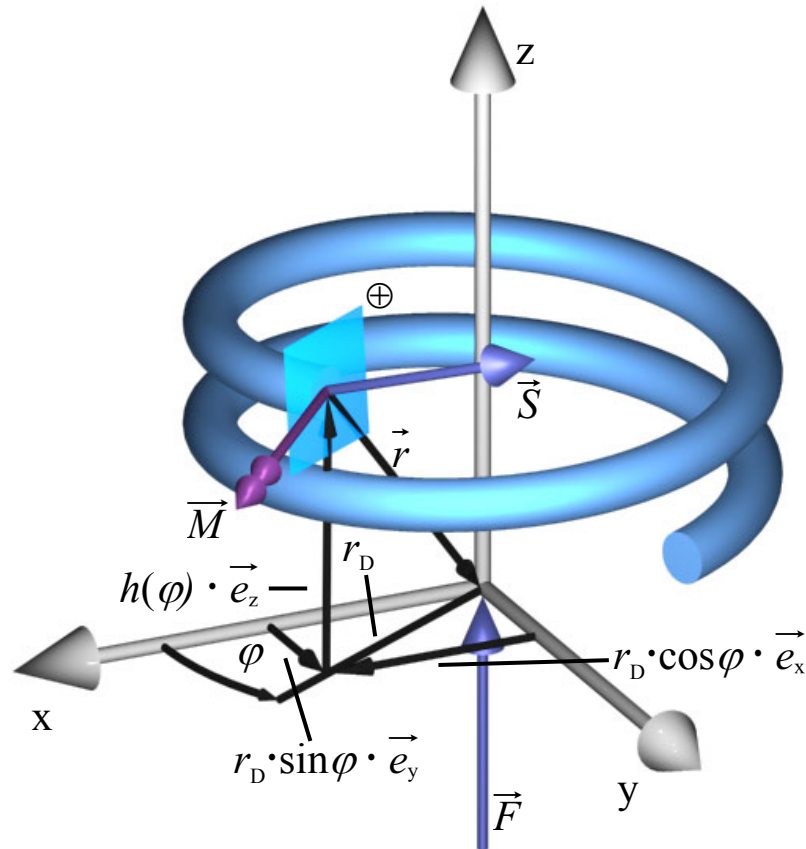


Bild 4: Anwenden des Schnittprinzips auf eine Schraubenfeder

Bei Zerlegung der Schnittkraft  $\vec{S}$  und des Schnittmomentes  $\vec{M}$  erhält man unter Zuhilfenahme des Steigungswinkels  $\alpha$

$$\alpha = \arctan \frac{m}{\pi \cdot D} \quad (11)$$

die in Tafel 3 aufgeführten Belastungskomponenten, die bei axialem Kraftangriff auf die Feder entstehen und senkrecht bzw. parallel zur Schnittfläche wirken.

Tafel 3: Belastungen (Betragswerte) des Federdrahtes bei Einwirken einer axialen Kraft  $F$

Belastungen des Federdrahtes	Mathematischer Zusammenhang
Normalkraft	$N = F \cdot \sin \alpha$ (12)
Biegemoment	$M_b = F \cdot \frac{D}{2} \cdot \sin \alpha$ (13)
Querkraft	$Q = F \cdot \cos \alpha$ (14)
Torsionsmoment	$M_t = F \cdot \frac{D}{2} \cdot \cos \alpha$ (15)

Bei den Gln. (12) bis (15) muss beachtet werden, dass sie belastungsabhängige Parameter enthalten, die eine geschlossene Berechnung der genannten Kräfte und Momente verhindern. So werden mit

Zunahme der Belastung der Steigungswinkel  $\alpha$  kleiner und der Windungsdurchmesser  $D$  größer. Außerdem ändert sich die Drahtlänge in geringem Maße. Damit dennoch Verformungs- und Festigkeitsbeziehungen aufgestellt werden können, werden diese Größen im weiteren, wie allgemein üblich, als nicht belastungsabhängig betrachtet.

Unter Berücksichtigung dieser sowie weiterer Voraussetzungen [30] lassen sich für die Berechnung der vorhandenen Spannung und der auftretenden Verformungen und damit für den Festigkeitsnachweis und den Funktionsnachweis die nachfolgenden Verbesserungen erreichen. Dabei wird das Verhalten der Übergangswindungen, die eine veränderliche Steigung besitzen, nicht erfasst.

### Verbesserter Festigkeitsnachweis von Schraubendruckfedern

Auf der Grundlage der in Tafel 3 aufgeführten Kräfte und Momente ist es möglich, alle im Draht auftretenden Spannungskomponenten zu berechnen (Tafel 4).

Tafel 4: Beanspruchungen des Federdrahtes bei Einwirken einer axialen Kraft  $F$

Beanspruchungen des Federdrahtes	Mathematischer Zusammenhang
Zug- / Druckspannung	$\sigma_{zd} = \frac{N}{A} = \frac{4 \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^2} \cdot F$ (16)
Biegespannung	$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{16 \cdot D \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot d^3} \cdot F$ (17)
Schubspannung	$\tau_q = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} = \frac{16 \cdot \cos \alpha}{3 \cdot \pi \cdot d^2} \cdot F$ (18)
Torsionsspannung	$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{8 \cdot D \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot d^3} \cdot F$ (19)

Sollen beim Festigkeitsnachweis alle Beanspruchungsarten berücksichtigt werden, geschieht dies mit Hilfe der Vergleichsspannung  $\sigma_v$ . Beim vorliegenden mehrachsigen Spannungszustand und beim Einsatz von Stahl wird üblicherweise die Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{(\sigma_{zd} + \sigma_b)^2 + 3 \cdot (\tau_q + \tau_t)^2} \quad (20)$$

angewendet [27], die vom Versagen des Bauteil aufgrund plastischer Verformung ausgeht.

Das Einsetzen der Gleichungen aus Tafel 4 in Gl. (20) liefert die Beziehung

$$\sigma_v = \frac{8 \cdot D \cdot F}{\pi \cdot d^3} \cdot \frac{w}{2 \cdot k_1(\alpha, w)} \cdot \cos \alpha \quad (21)$$

mit dem Faktor

$$k_1(\alpha, w) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha \cdot (1 + 4 \cdot w)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3} + 2 \cdot w\right)^2}}, \quad (22)$$

der vom Steigungswinkel  $\alpha$  und vom Wickelverhältnis

$$w = \frac{D}{d} \quad (23)$$

abhängt.

In Bild 5 bis Bild 8 wurden alle in der Feder auftretenden Spannungskomponenten zur Vergleichsspannung  $\sigma_v$  ins Verhältnis gesetzt und über dem Wickelverhältnis  $w$  abgetragen. Als Parameter dient der Steigungswinkel  $\alpha$ .

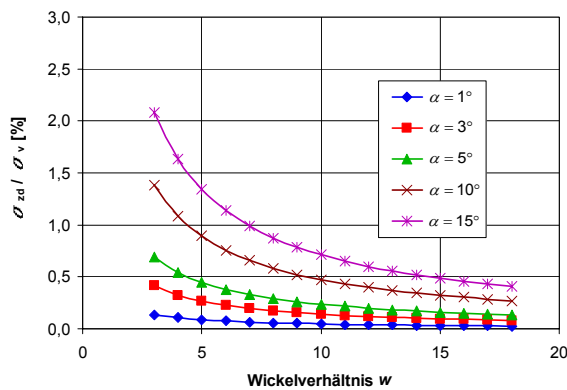


Bild 5: Verhältnis der Normalspannung  $\sigma_{zd}$  zu  $\sigma_v$

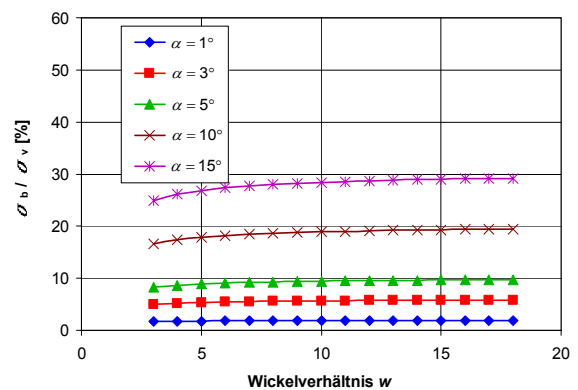


Bild 6: Verhältnis der Biegespannung  $\sigma_b$  zu  $\sigma_v$

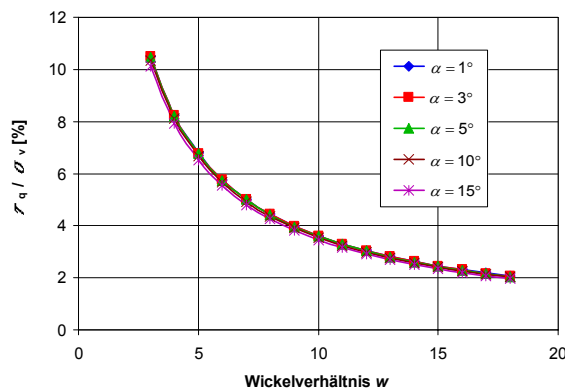


Bild 7: Verhältnis der Schubspannung  $\tau_q$  zu  $\sigma_v$

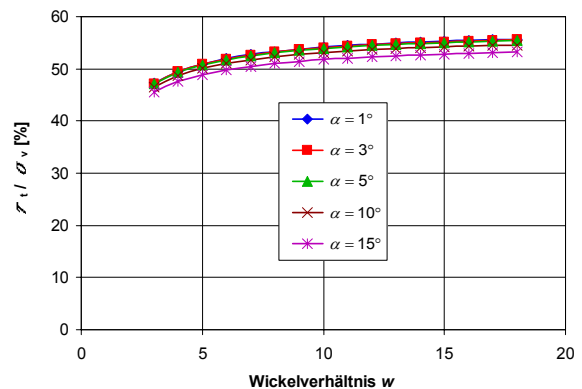


Bild 8: Verhältnis der Torsionsspannung  $\tau_t$  zu  $\sigma_v$

Ein Vergleich der Bilder zeigt, dass außer der Torsionsspannung  $\tau_t$  auch die Biegespannung  $\sigma_b$  einen großen Einfluss auf die Gesamtbeanspruchung der Feder haben kann. Zu berücksichtigen ist jedoch dabei, dass sie maßgeblich vom Steigungswinkel  $\alpha$  abhängt und dass dieser seinerseits vom

Grad des Zusammendrückens der Feder bestimmt wird. Beim üblichen Zusammendrücken der Feder bis in die Nähe der Blocklänge wird der Steigungswinkel  $\alpha$  klein und damit der Biegespannungsanteil nahezu Null.

## Verbesserter Funktionsnachweis von Schraubendruckfedern

Die Belastungskomponenten nach Tafel 3 wirken sich auch auf die Größe der Änderung der Federlänge und damit auf den Federweg  $s$  aus. Die Berechnung der Komponenten des Federweges ist über die Formänderungsenergie  $W_i$  und den Satz von *Castigliano* möglich. Danach ergibt sich der Federweg  $s$  als Verschiebung des Kraftangriffspunktes aus der partiellen Ableitung  $s = \partial W_i / \partial F$ . Die daraus folgenden einzelnen Verformungskomponenten sind Tafel 5 zu entnehmen.

Tafel 5: Anteile an der Gesamtverformung der Feder bei Einwirken einer axialen Kraft  $F$

Verformung aufgrund	Formeller Zusammenhang
der Normalkraft	$s_{zd} = \frac{4 \cdot F \cdot n_f \cdot D}{E \cdot d^2} \cdot \sin^2 \alpha \quad (24)$
des Biegemomentes	$s_b = \frac{16 \cdot F \cdot n_f \cdot D^3}{E \cdot d^4} \cdot \sin^2 \alpha \quad (25)$
Verformung aufgrund	Formeller Zusammenhang
der Querkraft	$s_q = k_s \cdot \frac{4 \cdot F \cdot n_f \cdot D}{G \cdot d^2} \cdot \cos^2 \alpha \quad (26)$
des Torsionsmomentes	$s_t = \frac{8 \cdot F \cdot n_f \cdot D^3}{G \cdot d^4} \cdot \cos^2 \alpha \quad (27)$

Aus der Addition der einzelnen Verformungsanteile ergibt sich Gesamtverformung  $s$  gemäß

$$s = \frac{4 \cdot F \cdot n_f \cdot w}{d} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{k_2(\alpha, w)} \quad (28)$$

mit dem Faktor

$$k_2(\alpha, w) = \frac{1}{\tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{E} \cdot (1 + 4 \cdot w^2) + \frac{1}{G} \cdot (k_s + 2 \cdot w^2)} \quad (29)$$

In Bild 9 bis Bild 12 wurden alle Anteile, die zur Verformung der Feder beitragen, zur Gesamtverformung  $s$  ins Verhältnis gesetzt und über dem Wickelverhältnis  $w$  abgetragen. Als Parameter dient der Steigungswinkel  $\alpha$ . Ein Vergleich der Bilder zeigt deutlich, daß der größte Anteil an der Verformung der Feder vom Torsionsmoment  $M_t$  herrührt. Der Verformungsanteil  $s_t$  liegt bei nahezu 100 %.



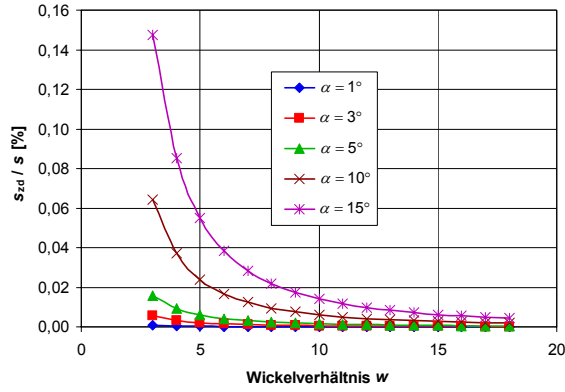


Bild 9: Verhältnis des Verformungsanteils  $s_{zd}$ , resultierend aus der Normalkraft  $N$ , bezüglich der Gesamtverformung  $s$

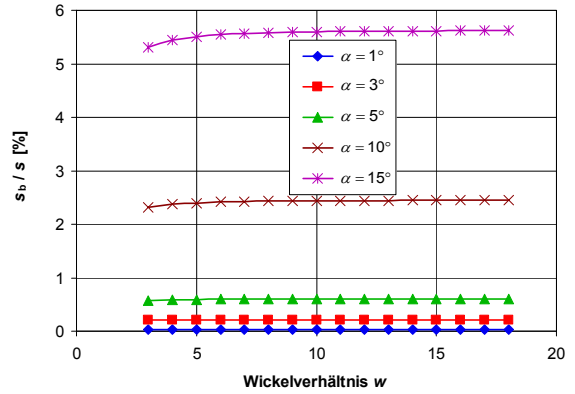


Bild 10: Verhältnis des Verformungsanteils  $s_b$ , resultierend aus dem Biegemoment  $M_b$ , bezüglich der Gesamtverformung  $s$

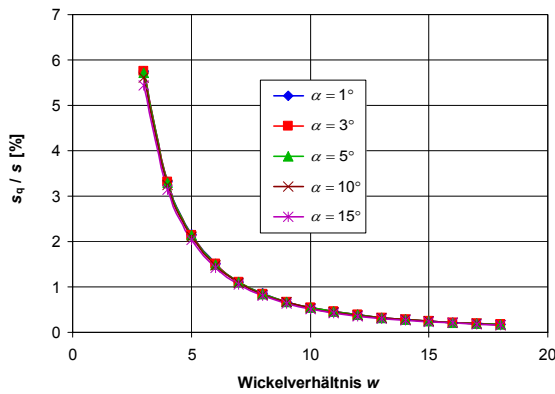


Bild 11: Verhältnis des Verformungsanteils  $s_q$ , resultierend aus der Querkraft  $Q$ , bezüglich der Gesamtverformung  $s$

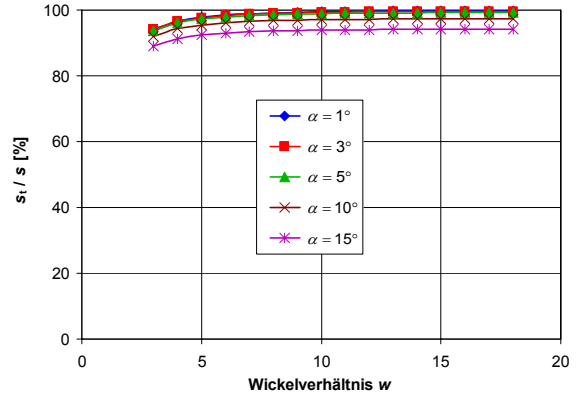


Bild 12: Verhältnis des Verformungsanteils  $s_t$ , resultierend aus dem Torsionsmoment  $M_t$ , bezüglich der Gesamtverformung  $s$

Der Kraft-Weg-Zusammenhang der Feder kann durch Umstellen der Gl. (28) gewonnen werden. Für die Federrate  $R$  ergibt sich daraus die Beziehung

$$R = \frac{F}{s} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n_f \cdot D^3} \cdot \frac{2 \cdot k_2(\alpha, w)}{G \cdot w^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (30)$$

die ebenso wie die exaktere Bestimmungsgleichung für die in der Feder hervorgerufene Spannung (Gl. (21)) und damit für den Festigkeitsnachweis problemlos in **FedPro** implementiert werden kann. Weitere Verbesserungen des Berechnungsmodells erhält man bei Berücksichtigung der Lastabhängigkeit des Steigungswinkels  $\alpha$ . Entsprechende Untersuchungen hierzu sind in Arbeit.

## ZUSAMMENFASSUNG

Mit Hilfe der Rechentechnik und speziell entwickelter Software ist es heute möglich, das aufwendige iterative Dimensionieren und Optimieren von Schraubendruckfedern weitestgehend zu automatisieren. Ein sehr gut für die Federdimensionierung und -optimierung geeigneter Berechnungsalgorithmus ist die Parameteranalyse. Dieser Algorithmus wird in der im Beitrag vorgestellten Software **FedPro** verwendet, wodurch das Programm in der Lage ist, effektiv optimale Schraubendruckfedern zu dimensionieren.

Aufgrund der großen Rechnerleistungen, die heute bereits Standard-PC's besitzen, ist es außerdem möglich, bei der Federdimensionierung komplexere Berechnungsmodelle zu verwenden, die eine reale Feder mathematisch-physikalisch exakter beschreiben als bisher. Die im Beitrag beschriebene Berücksichtigung aller an einer Feder auftretenden Belastungsarten, ist nur eine Möglichkeit der Verbesserung des Federmodells, zu deren Berechnung bereits in Anwendung befindliche Algorithmen mit wenig Aufwand angepasst werden können. An weiteren Verbesserungen der Federdimensionierung bzw. -optimierung wird gearbeitet.

### Literatur- bzw. Quellenhinweise:

- [1] Lutz, S.: Schwingungsverhalten von Schraubenfedern.  
Seminar Kaltgeformte Federn an der Technischen Akademie Esslingen 20. – 21.09.2004
- [2] Krug, W.; Schönfeld, S.: Rechnergestützte Optimierung für Ingenieure.  
VEB Verlag Technik, Berlin, 1981
- [3] Meissner, M.; Schorcht, H.-J.: Metallfedern.  
Reihe Konstruktionsbücher, Bd. 41, Springer Verlag, 1997
- [4] Meissner, M.: Beitrag zur Parameteroptimierung von Federn.  
Draht 44 (1993) 6, Seite 365-368
- [5] Hager, K.-F.: Berechnung und Optimierung von Federn.  
19. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium TH Ilmenau (1974) 3, Seite 109-112,  
Vortragsreihe „Geräteentwicklung“
- [6] Schade, H.: Beitrag zur Berechnung zylindrischer Schraubenfedern.  
VDI-Zeitschrift 98 (1956) 4, Seite 131-132
- [7] Höhne, G.: Lehrblätter Konstruktionsmethodik / CAD.  
Fachgebiet Konstruktionstechnik, TU Ilmenau
- [8] Krause, W.: Gerätekonstruktion.  
VEB Verlag Technik, Berlin, 1982
- [9] Pahl, G.; Beitz, W.: Konstruktionslehre.  
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 4. neubearbeitete Auflage, 1997
- [10] Nestler, W.: Optimierung zylindrischer Druckfedern mittels EDV-Anlagen.  
Technische Information Armaturen 6 (1971) 2/3, Seite 21-24
- [11] DIN 2089 Teil 1, Zylindrische Schraubendruckfedern aus runden Drähten und Stäben -  
Berechnung und Konstruktion. Dezember 1984
- [12] Orthwein, W. C.: Calculator Program for Compression Springs.  
Computers in Mechanical Engineering 7 (1988) 3, Seite 17-28
- [13] DF\_Dim: Dimensionierung von Schraubendruckfedern mit MS Excel  
Dr. Steffen Lutz (TU Ilmenau)
- [14] Singh, S.: A Fast Method for Design of Helical Compression Springs.  
Proceeding of the 7th. ISME Conference, Indian Society of Mechanical Engineers, New Delhi, IND,  
1.-3.2.1990, Seite 149-157
- [15] Fröhlich, P.: Druckfederberechnung und -optimierung mit dem Tischrechner.  
Konstruktion 28 (1976) 6, Seite 227-228
- [16] Ruoss, F.: Berechnungsgang: Auslegung von Druckfedern.  
Der Konstrukteur 22 (1991) 10, Seite 58, 60-64
- [17] Wilms, V.: Gewichtsoptimales Auslegen kaltgeformter zylindrischer Schraubenfedern unter statischer Belastung.  
Werkstatt und Betrieb 115 (1982) 3, Seite 197-201
- [18] Dannert, H. D.: Computerberechnung von Schraubendruckfedern.  
Draht 37 (1986) 8, Seite 470-472

- [19] Gal, T.: Grundlagen des Operations Research - Band 2.  
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 2. Auflage, 1989
- [20] Groß, S.: Berechnung und Gestaltung von Metallfedern.  
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 3. Auflage, 1960
- [21] FedPro – Software zur Dimensionierung von Schraubendruckfedern  
Steinbeis-Transferzentrum Federntechnik Ilmenau - [www.tu-ilmenau.de/stz-federntechnik](http://www.tu-ilmenau.de/stz-federntechnik)
- [22] Schorcht, H.-J.; Weiß, M.; u.a.: Technologien zur Weiterentwicklung der Qualität und Verarbeitbarkeit von Federdraht durch Kenntnis seines Umformverhaltens.  
Abschlußbericht AiF-Forschungsthema 11517 B, TU Ilmenau 2001
- [23] Schorcht, H.-J.; Lutz, St.: Quer-Eigenfrequenzen von zylindrischen Schraubenfedern aus runden Drähten.  
Abschlußbericht AiF-Forschungsthema 9232 B, TU Ilmenau 1995
- [24] Schorcht, H.-J.; Lutz, St.: Gestaltabhängige Kennwerte zur Berechnung der Eigenfrequenzen von Schraubenfedern.  
Abschlußbericht AiF-Forschungsthema 10337 B, TU Ilmenau 1998
- [25] Geinitz, V.: Umformverhalten von Federstahldraht.  
Draht 52 (2001) 6, Seite 36-40
- [26] Weiß, M.; Geinitz, V.: Ermittlung von funktions- und fertigungsrelevanten Federdrahtkennwerten (E- und G-Modul). Forschungsantrag zum gleichnamigen AiF-Projekt BR 08505/03, TU Ilmenau 2003.
- [27] Steinhilper, W.; Röper, R.: Maschinen- und Konstruktionselemente 3.  
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1996
- [28] DIN 17223 Teil 1, Runder Federstahldraht - Patentiert-gezogener Federdraht aus unlegierten Stählen - Technische Lieferbedingungen.  
Dezember 1984
- [29] DIN 17224, Federdraht und Federband aus nichtrostenden Stählen -  
Technische Lieferbedingungen. Februar 1982
- [30] Liebermann, K.: Rechnergestütztes Entwurfs- und Optimierungssystem für Schraubendruckfedern. Dissertation TU Ilmenau 2003 in  
Berichte aus dem Institut, Bericht Nr. 9 2003

**Autorenangabe(n):**

Dr.-Ing. Kersten Liebermann

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Mathias Weiß

TU Ilmenau, Fachgebiet Maschinenelemente, PF 100565

98684 Ilmenau

Tel.: (03677) 4690 43

Fax: (03677) 4690 62

E-mail: [kersten.liebermann@tu-ilmenau.de](mailto:kersten.liebermann@tu-ilmenau.de), [mathias.weiss@tu-ilmenau.de](mailto:mathias.weiss@tu-ilmenau.de)